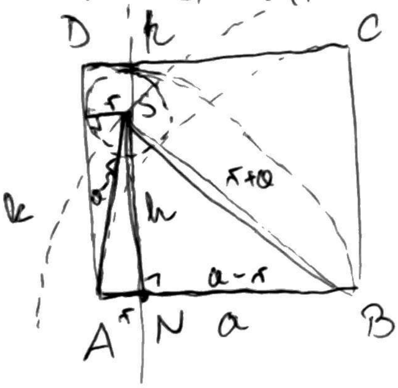
Zad. 1.:

I. ALGEBARSKA METODA:



$$\left.\begin{array}{l}\text{Pitagora u } \triangle NBS \Rightarrow h^2 = (a+r)^2 - (a-r)^2 = 4ar \\ \text{— || —} \ \triangle ANS \Rightarrow h^2 = (a-r)^2 - r^2 = a^2 - 2ar\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{6}$$

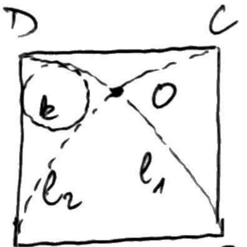
Središte kružnice dobijemo metodom presjeka:

$S \in p \cap k$, p udaljen od AD za $r = \frac{a}{6}$ (unutar □)

te $k = k(B, r+a)$

Opis konstr.:
1. $r = \frac{a}{6}$ (dijelimo dužinu u omjeru ...)
2. $p \parallel AD$ unutar kvadrata t.d. $d(p, AD) = r$
3. $k = k(B, a+r)$.
4. $S \in p \cap k$, unutar kvadrata
5. $k(S, r)$ je tražena kružnica

II. INVERZIJA:



↓

„Apolonijev" problem

problem kkp

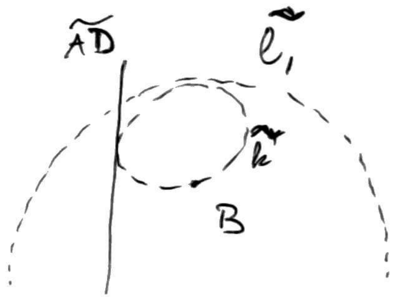
→ smanjimo kružnicu l_2 za a

⇓

k povećamo za a

l_1 povećamo za a

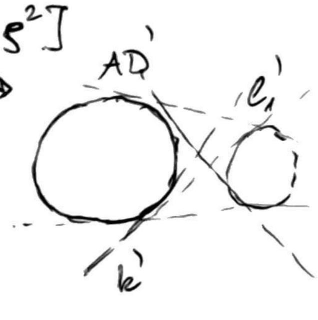
AD udaljimo za a (ulijevo)



↓

Tpk problem

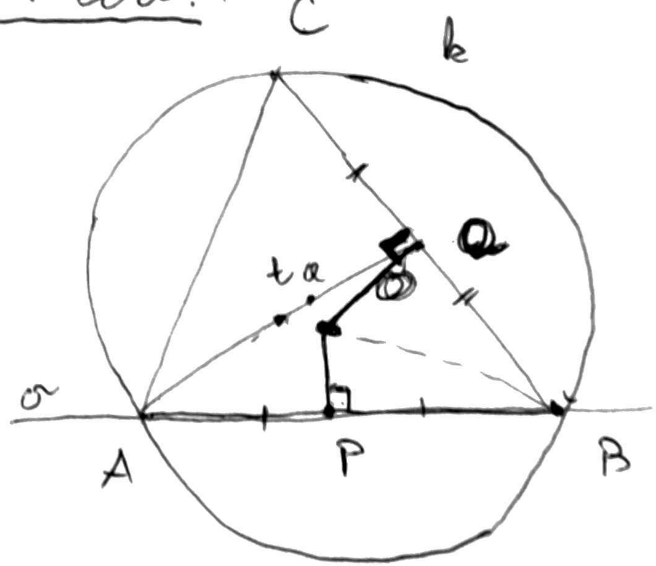
$i[B, \rho^2]$ →



↓

k' je jedna od zajedničkih tang. na AD' i l_1'

2. rod. :



Opis konstr. :

1. povučemo bilo koje dvije tetive u k; sjecište njihovih sim. je točka O (središte od k)

2. Okomica o u P na OP
3. A, B $\in o \cap k$

] konstr. točaka A i B.

4. k_1 kružnica promjera $\overline{OB}$
5. $k_2 = k(A, t_a)$
6. $Q \in k_1 \cap k_2$
7. $C = k \cap BQ$

] konstr. točke C

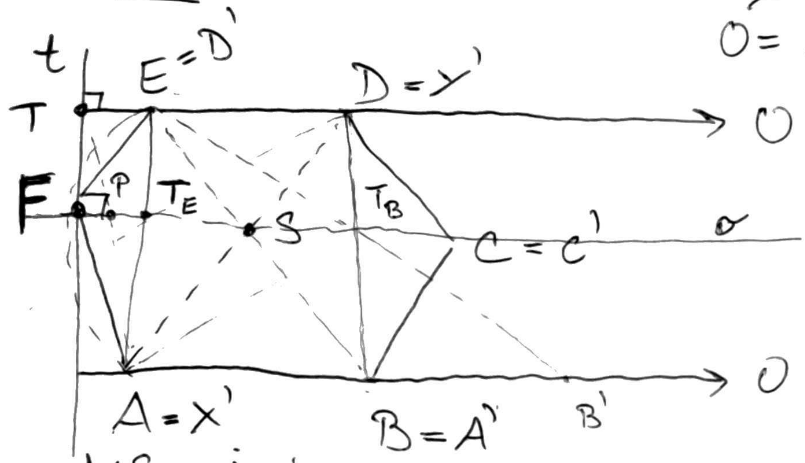
Dokaz konstr.: O je središte ~~konstr.~~ kr. k po konstr.

Kako je $OP \perp AB \Rightarrow$ P je polovište $\overline{AB}$ ✓

Iz $Q \in k_1 \overset{\text{Tales}}{\Rightarrow} OQ \perp CB \Rightarrow$ Q je polovište CB,

nadalje $Q \in k_2 \Rightarrow |AQ| = t_a \Rightarrow$ težišnjica iz A ima duljinu t_a

Zad. 3.:



$\nearrow$ središte od K

$O = AA' \cap DD' = AB \cap DE = \infty$ daleka točka od AB

$o = SC$, $S = AD \cap A'D'$ je os od K

MS + zj.:

- slike vrhova: [8 b]

$A \mapsto B$ 1 b

$B \mapsto B' \rightarrow T_B = o \cap BD$; $B' = AB \cap ET_B$ 2 b

$C \mapsto C$ 1 b

$D \mapsto E$ 1 b

$E \mapsto E' \rightarrow T_E = o \cap EA$; $E' = DE \cap BT_E$ 2 b

$F \mapsto F$ 1 b

- praslike vrhova: [8 b]

$A \mapsto X \rightarrow X = AB \cap T_E D$ 2 b

$B \mapsto A$ 1 b

$C \mapsto C$ 1 b

$D \mapsto Y \rightarrow Y = DE \cap AT_B$ 2 b

$E \mapsto D$ 1 b

$F \mapsto F$ 1 b

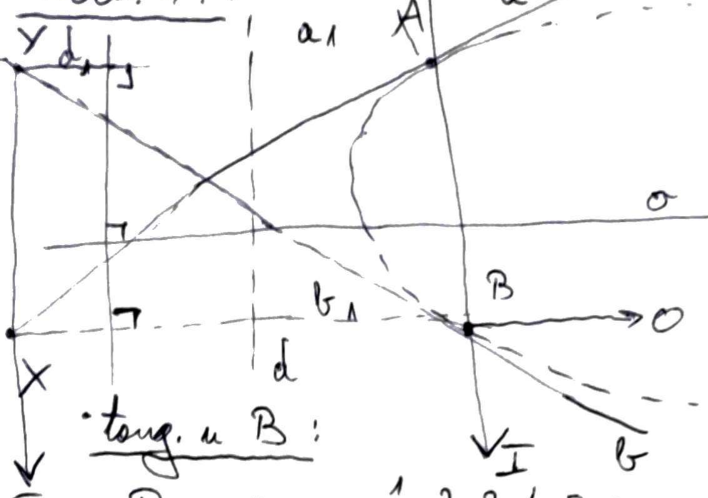
- slika pravca t: [2 b]

1. $T = t \cap DE$
2. $P = TA \cap o$
3. $T' = DE \cap BP$
4. $t' = T'F$

- praslika ∞ dalekog pravca p_∞: [2 b]

kako je K persp. afinost imamo da $p_\infty \mapsto p_\infty$ $\Rightarrow$ praslika je ponovo p_∞

Zad. 4.:



• tang. u B:

Pascal na $\overset{1}{A}\overset{2}{A}\overset{3}{B}\overset{4}{B}\overset{5}{O}\overset{6}{O}$: $a \cap \overbrace{BO}^{b_1} = X$ ✓

$AB \cap t_O = AB \cap p_\infty = I$ ∞ daleka od AB ✓

$b \cap \underbrace{AO}_{a_1} = \boxed{Y}$

$\Rightarrow X, I, Y$ kolin. $\Rightarrow Y = XI \cap AO \Rightarrow b = BY$ je tang. u B

• fokus F: Znamo da se na pravcu $a_1 = AO$ nalazi suprotište od F preko a

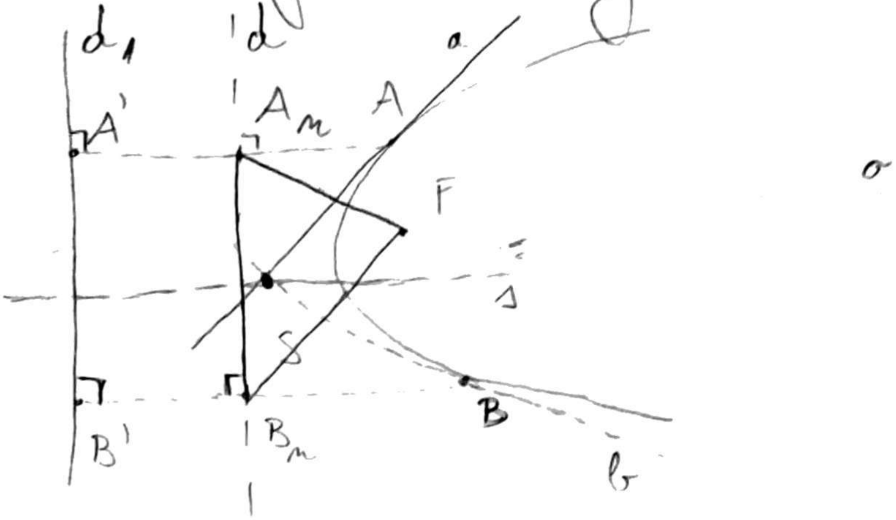
def. suprot. $\Rightarrow F \in s_a(a_1)$, analogno je $F \in s_b(b_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = s_a(a_1) \cap s_b(b_1)$

Opis konstr.:

1. o je bilo koja okomica na d_1 te O ∞ daleka točka od o
2. $a_1 = AO$ je paralela s o kroz A
   $b_1 = BO$ — " — kroz B
3. $X = a \cap b_1$
4. $Y = a_1 \cap$ (paralela s AB kroz X)
5. $b = BY$ je tangenta u B.
6. $F = s_a(a_1) \cap s_b(b_1)$.

4. zad. – rj. bez Pascalovog tm.

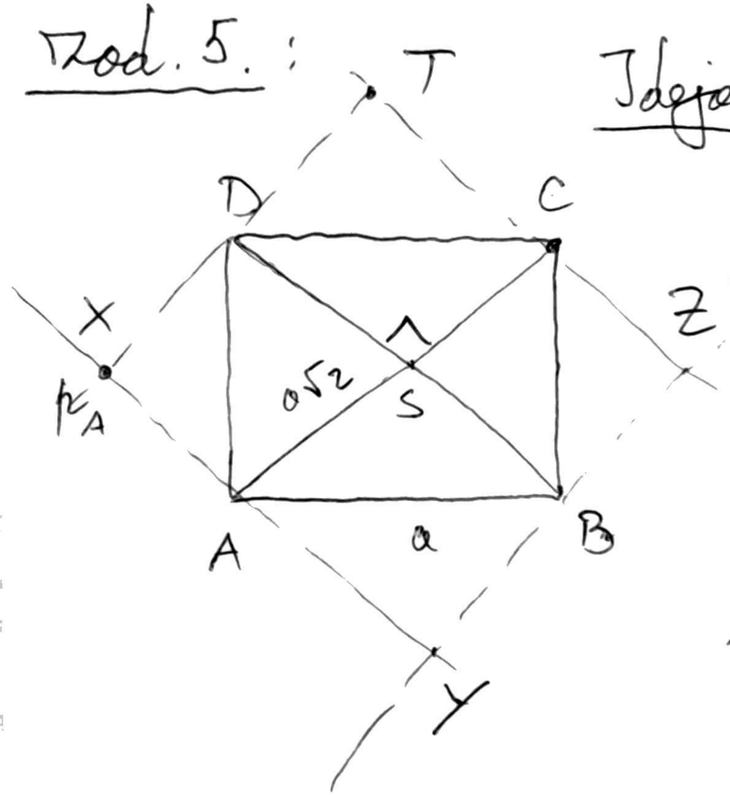


· Analiza: Označimo s A_n i B_n nožišta okomica iz A i B na direktrisu d. Zbog zrcalnih svojstva znamo da su tangente a i b simetrale dužina $\overline{A_nF}$ i $\overline{B_nF}$. Nadalje, ako označimo sa $S := a \cap b$, iz gornjeg slijedi da je točka S središte opisane kružnice ΔA_nB_nF. Iako nemamo dužinu $\overline{A_nB_n}$, možemo ipak konstruirati njenu simetralu koristeći nožišta okomica A' i B' iz A i B na d_1.

· Opis konstr.:

1. A', B' redom nožišta okomica iz A i B na d_1
2. s sim. dužine $\overline{A'B'}$.
3. $S = a \cap s$
4. $b = BS$ je tražena tang. u B
5. $F = s_a(AA') \cap s_b(BB')$ [kao u prošlom rj.]

Zad. 5.:

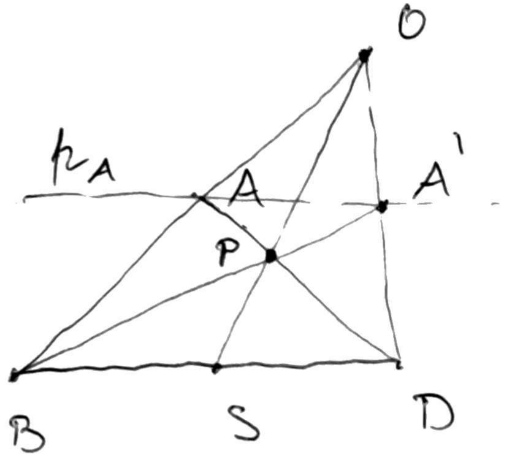


Ideja: • Uočimo da moramo konstr. kvadrat str. $a\sqrt{2}$ što je upravo duljina dijag. □.

• Da bi konstr. takav kvad. dovoljno je samo povući ~~dij~~ paralele s dijagonalama kroz nasuprotne vrhove.

Konstr. paralele s dijag BD kroz A:

1. O proizvoljna točka na pravcu AB, različita od A i B ~~$\notin BD$ i $\neq A$~~
2. $S = AC \cap BD$
3. $P = OS \cap AD$
4. $A' = BP \cap OD$
5. $p_A = AA'$ je tražena paralela



Analogno konstr. ostale paralele p_B, p_C i p_D.

Traženi kvad je omeđen tim paralelama $p_A, \dots, p_D$.